

Barem clasa a XII-a

(OLM 2026-etapa locală)

Subiectul 1 (25 puncte)

$$(x+1)(x+4) = x^2 + 5x + 4, \text{ iar } (x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6 \dots\dots\dots(6p)$$

Notăm: $x^2 + 5x + 4 = t$. Atunci $(2x+5)dx = dt$

$$\int \frac{dt}{t(t+2)+1} = \int \frac{dt}{t^2+2t+1} = \int \frac{dt}{(t+1)^2} = \dots\dots\dots(10p)$$

$$= \int (t+1)^{-2} dt = -\frac{1}{t+1} + C \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{x^2+5x+5} + C, C \in \mathbb{R} \dots\dots\dots(5p)$$

$$F(1) = -\frac{1}{11} + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{x^2+5x+5} \dots\dots\dots(4p)$$

Subiectul 2 (25 puncte)

$$a) x^3 = (aba^{-1})(aba^{-1})(aba^{-1}) = ab^3a^{-1} \dots\dots\dots(10p)$$

$$b) \text{ Se dem. prin inducție matematică faptul că } x^n = ab^n a^{-1}, n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots(10p)$$

$$\text{Atunci } a = ea = x^n a = ab^n a^{-1} a = ab^n, \text{ deci } b^n = e \dots\dots\dots(5p)$$

Subiectul 3 (20 puncte)

$$a) \text{ Calculul lui } \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ ori } x} = (x - 2026)^n + 2026 \dots\dots\dots(4p)$$

$$\int \frac{1}{(x-2026)\ln(x^{(n)}-2026)} dx = \int \frac{1}{(x-2026)\ln(x-2026)^n} dx = \frac{1}{n} \int \frac{1}{(x-2026)\ln(x-2026)} dx \dots\dots\dots(2p)$$

$$\text{Finalizare } \int \frac{1}{(x-2026)\ln(x^{(n)}-2026)} dx = \frac{1}{n} \ln|\ln(x-2026)| + C \dots\dots\dots(4p)$$

$$b) \text{ Fie } H \text{ o parte stabilă finită a lui } \mathbb{R} \text{ în raport cu legea de compoziție " * ". Atunci,}$$

$$\text{dacă } x \in H \Rightarrow x^{(2)} = x * x \in H, x^{(3)} = x * x * x \in H \dots x^{(n)} = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ ori}} \in H \dots\dots\dots(1p)$$

$$\text{Deoarece } H \text{ este mulțime finită} \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N}, m > n \text{ astfel încât } x^{(m)} = x^{(n)} \dots\dots\dots(2p)$$

$$\text{Atunci } (x - 2026)^m = (x - 2026)^n \Rightarrow (x - 2026)^n [(x - 2026)^{m-n} - 1] = 0 \Rightarrow \text{valorile posibile ale lui } x \text{ sunt}$$

$$2025, 2026, 2027 \dots\dots\dots(2p)$$

$$\text{Convin doar } \{2006\}, \{2027\}, \{2026, 2027\}, \{2025, 2027\}, \{2025, 2026, 2027\} \dots\dots\dots(5p)$$

Subiectul 4 (20 puncte)

$$\text{Înmulțim relația din enunț cu } \frac{1}{x} \text{ și obținem: } \frac{f''(x)}{x} = \frac{1}{x^2} \cdot f'(x) + x^3 + \frac{1}{x^3} \dots\dots\dots(3p)$$

$$\text{adică } \frac{f''(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot f'(x) = x^3 + \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{x} \right)' = x^3 + \frac{1}{x^3} \dots\dots\dots(6p)$$

$$\text{Integrăm și obținem: } \frac{f'(x)}{x} = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2} + C_1 \Leftrightarrow \dots\dots\dots(3p)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^5}{4} - \frac{1}{2x} + C_1 \cdot x \dots\dots\dots(3p)$$

$$\text{care se integrează din nou și obținem: } f(x) = \frac{x^6}{24} - \frac{1}{2} \cdot \ln x + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2, C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in (0, +\infty) \dots\dots\dots(5p)$$